

Προσομοίωση Εξετάσεων (Εξ Αποστάσεως) Μιγαδικές Συναρτήσεις Ι

ΔΙΑΡΚΕΙΑ 3 Ώρες

Στοιχειοθεσία Θεμάτων: Δήμογλου Κωνσταντίνος, Μαθηματικός (Msc).

Θέμα 1 Η τιμή της παράστασης $A = \frac{(1+i)^{2020}}{(i-\sqrt{3})^6}$ ισούται με:

- (i) -2^{1004}
- (ii) 2^{1004}
- (iii) $-i2^{1004}$
- (iv) $i2^{1004}$

Θέμα 2 Το σύνολο $A = \{z : \operatorname{Re}(z^2) = |\sqrt{3} - i|\}$ παριστάνει:

- (i) Κύκλο
- (ii) Έλλειψη
- (iii) Υπερβολή
- (iv) Ευθεία

Θέμα 3 Το σύνολο $A = \{z : -\frac{3\pi}{4} < \operatorname{Arg}(z) < -\frac{\pi}{4}\}$ παριστάνει:

- (i) Τόξο κύκλου
- (ii) Εσωτερικό μιας έλλειψης
- (iii) Εσωτερικό ενός άνω κώνου
- (iv) Εσωτερικό ενός κάτω κώνου

Θέμα 4 Δίνεται η εξίσωση $z^{11} + z^{10} + z^9 + \dots + z^2 + z + 1 = 0$. Τότε

- (i) η εξίσωση έχει το πολύ 11 ρίζες
- (ii) η εξίσωση δεν έχει καμία ρίζα
- (iii) Οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$ και $z_2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ είναι ρίζες της εξίσωσης
- (iv) η εξίσωση δεν έχει πραγματική λύση

Θέμα 5 Δίνεται το σύνολο $A = \left\{ z : \operatorname{Re}(z) \geq 1, 0 \leq \operatorname{Im}(z) \leq \frac{1}{\operatorname{Re}(z)} \right\}$

- (i) Το σύνολο A είναι συμπαγές.
- (ii) Το σύνολο A είναι κλειστό και δεν είναι φραγμένο.
- (iii) Το σύνολο A δεν είναι ούτε ανοιχτό ούτε κλειστό.

(iv) Το σημείο $z_0 = 0$ δεν είναι σημείο επαφής του A

Θέμα 6 (Σωστό ή Λάθος) Για συνάρτηση του κύριου ορίσματος υπάρχει η μερική παράγωγος ως προς x σε σημεία της μορφής iy , $y > 0$.

Θέμα 7 Η συνάρτηση $f(z) = (z^2 - 1)\bar{z}$

- (i) δεν είναι πουθενά είναι μιγαδικά διαφορίσιμη
- (ii) είναι ακέραια
- (iii) είναι ολόμορφη πάνω στην υπερβολή $x^2 - y^2 = 1$
- (iv) μόνο στα σημεία $z = \pm 1$

Θέμα 8 Δίνεται η ακολουθία $z_n = \frac{i}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Τότε, το όριο $\lim_n (z_1^{z_1} z_2^{z_2} \dots z_n^{z_n})$

- (i) ισούται με 0
- (ii) δεν υπάρχει
- (iii) ισούται με $+\infty$
- (iv) ισούται με $\frac{1}{2}$

Θέμα 9 (Σωστό ή Λάθος;) Αν $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ ικανοποιεί τις εξισώσεις Cauchy-Riemann σε κάποιο σημείο $z_0 = x_0 + iy_0$, τότε τις ικανοποιεί και η συνάρτηση $f^2(z)$.

Θέμα 10 (Σωστό ή Λάθος;) Κάθε ακέραια συνάρτηση f για την οποία $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$ είναι σταθερή.

Θέμα 11 (Σωστό ή Λάθος;) Η συνάρτηση $f(z) = \frac{1}{(1+z)^2}$ έχει ανάπτυγμα Taylor και είναι το $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n z^n$, για $|z| < 1$.

Θέμα 12 Η συνάρτηση $g(z) = z \cos \frac{1}{z}$, $z \neq 0$ στο σημείο 0 έχει

- (i) επουσιώδη ανωμαλία
- (ii) απλό πόλο
- (iii) ουσιώδη ανωμαλία
- (iv) τίποτα από τα παραπάνω

Θέμα 13 Έστω f μια ακέραια μιγαδική συνάρτηση τέτοια ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $|x - 3| = 1$ να ισχύει $f(x)e^x = \sin x$. Η τιμή της παράστασης $A = f(0) + f'(0) + f(\pi) + f'(\pi)$ είναι ίση με

- (i) 1
- (ii) $1 + e^{-\pi}$

(iii) i

(iv) $1 - e^{-\pi}$

Θέμα 14 Να επιλέξετε τη σωστή τιμή του ολοκληρώματος $\int_{\gamma} (z+3) \log(z+3) dz$, όπου γ η καμπύλη με παραμετρική παράσταση $\gamma(t) = \begin{cases} e^{it} & , t \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ 2 \cos t + i \sin t & , t \in (\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$,

(i) $-16 \log 2 + \frac{15}{8}$

(ii) $16 \log 2 - \frac{15}{8}$

(iii) 0

(iv) $2021i$

Θέμα 15 (Σωστό ή Λάθος;) Η συνάρτηση $f(z) = \operatorname{Re}(z)$, $z \in \mathbb{C}$ είναι ολοκληρώσιμη (δηλαδή, έχει αρχική συνάρτηση στο \mathbb{C}).

Θέμα 16 (Σωστό ή Λάθος;) Για $z, w \in \mathbb{C}$ με $|z - i| > 2$ και $|w - i| = 3$ ισχύει

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{w-i}{z-i} \right)^n = \frac{z-i}{z-w}.$$

Θέμα 17 (Σωστό ή Λάθος;) Έστω S η απλή θετικά προσανατολισμένη περιφέρεια του δίσκου $D(0, 5)$, και \hat{S} η απλή θετικά προσανατολισμένη περιφέρεια του δίσκου $D(0, 4)$, τότε

$$\int_S \frac{\zeta^{2021}}{(\zeta - i\pi)^{2021}} d\zeta = \int_{\hat{S}} \frac{\zeta^{2021}}{(\zeta - i\pi)^{2021}} d\zeta = 0.$$

Θέμα 18 (Σωστό ή Λάθος;) Αν μια f είναι ορισμένη σε ένα ανοιχτό D υποσύνολο του \mathbb{C} είναι ολοκληρώσιμη, τότε είναι και ολόμορφη στο D .

Θέμα 19 (Σωστό ή Λάθος;) Έστω $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ είναι μια λεία καμπύλη μήκους L και έστω επίσης $f : \gamma([0, 1]) \rightarrow \mathbb{C}$ μια συνεχής συνάρτηση. Αν $L = 0$, τότε $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$.

Θέμα 20 (Σωστό ή Λάθος;) Έστω g μια ακέραια και μη σταθερή συνάρτηση. Τότε, $\overline{g(\mathbb{C})} = \mathbb{C}$ (Δηλαδή, η g έχει πυκνή εικόνα στο \mathbb{C}).

ΚΑΛΗ ΤΥΧΗ!!